Die Würfel des Zauberers Q

FELIX-BENJAMIN BROSOWSKY UND FRANK MAROHN, WÜRZBURG

Zusammenfassung: *Ein Zauberer bietet Ihnen zwei Glücksspiele mit einem Würfel an. Aufgrund Ihrer stochastischen Bewertung wählen Sie das Glücksspiel, bei dem ein höherer Gewinn zu erwarten ist. Aber Sie verlieren. Kann der Zauberer den Würfel so gefälscht haben, dass beim zweifachen Wurf das Augenmaximum gleichverteilt ist? Die Beantwortung dieser Frage führt auf das Lösen quadratischer Gleichungen. Und wie lautet die Antwort, wenn zwei visuell nicht unterscheidbare Würfel gleichzeitig geworfen werden?*

1 Einleitung

Ausgehend vom zweifachen Wurf eines Würfels bietet Ihnen der Zauberer Q zwei Glücksspiele an:

Glücksspiel 1: Bei „Augensumme gerade" gewinnen Sie a Euro, bei „Augensumme ungerade" verlieren Sie a Euro, $a > 0$.

Glücksspiel 2: Bei „Augenmaximum 5 oder 6" gewinnen Sie a Euro, bei „Augenmaximum kleiner oder gleich 4" verlieren Sie a Euro, $a > 0$.

Welches Glücksspiel sollten Sie wählen?

2 Stochastische Bewertung der Glücksspiele

Um die Frage zu beantworten, berechnen Sie für beide Glücksspiele den Erwartungswert (erwarteter Gewinn). Zunächst gibt es 36 mögliche Ausgänge beim zweifachen Würfelwurf. Der Ergebnisraum ist das zweifache kartesische Produkt von $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$,

$$\Omega^2 = \{1,2,3,4,5,6\}^2 = \{(i,j) : i,j = 1,\ldots,6\},$$

wobei die erste (zweite) Komponente des Tupels (i,j) die Augenzahl des ersten (zweiten) Wurfes bezeichnet. Sie gehen von einem fairen Würfel aus und wählen daher ein Laplace-Modell:

$$P^2\big(\{(i,j)\}\big) := P(\{i\}) \cdot P(\{j\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6},\ (i,j) \in \Omega^2.$$

P ist dabei die Laplace-Verteilung (Gleichverteilung) auf Ω. Das Produktmaß P^2 modelliert die stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen, die sich auf den ersten bzw. zweiten Wurf beziehen. (Genauer: Die Ereignisse $A \times \Omega$ und $\Omega \times B$, $A, B \subset \Omega$, sind stochastisch unabhängig bezüglich P^2.)

Glücksspiel 1: Die Augensumme wird beschrieben durch die Zufallsvariable $S : \Omega^2 \to \mathbb{R}$, $S(\omega) = i + j$, $\omega = (i,j)$. Es gibt 18 Möglichkeiten für „Augensumme gerade". Denn: i und j müssen beide gerade sein oder beide ungerade, also $3 \times 3 + 3 \times 3 = 18$ Paare. Damit ist

$$P^2(S \text{ ist gerade}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Bezeichnet Y_S Ihren Spielgewinn, formal

$$Y_S((i,j)) = \begin{cases} a, & \text{falls } i+j \in \{2,4,6,8,10,12\} \\ -a, & \text{falls } i+j \in \{3,5,7,9,11\}, \end{cases}$$

so gilt für den Erwartungswert

$$E(Y_S) = a \cdot \frac{1}{2} + (-a) \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

und das Spiel ist fair!

Glücksspiel 2: Das Augenmaximum wird beschrieben durch die Zufallsvariable $M : \Omega^2 \to \mathbb{R}$, $M(\omega) = \max\{i,j\}$, $\omega = (i,j)$. Die möglichen Werte von M sind die Zahlen 1 bis 6. Diese werden mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angenommen:

$$\begin{aligned} P^2(M=1) &= P^2(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}, \\ P^2(M=2) &= P^2(\{(1,2),(2,1),(2,2)\}) = \frac{3}{36}, \end{aligned}$$

$P^2(M=3) = 5/36$, $P^2(M=4) = 7/36$, $P^2(M=5) = 9/36$, $P^2(M=6) = 11/36$. Bezeichnet Y_M Ihren Spielgewinn, formal

$$Y_M((i,j)) = \begin{cases} -a, & \text{falls } \max\{i,j\} \in \{1,2,3,4\} \\ a, & \text{falls } \max\{i,j\} \in \{5,6\}, \end{cases}$$

so gilt für den Erwartungswert

$$\begin{aligned} E(Y_M) &= -a \cdot P^2(M \leq 4) + a \cdot P^2(M \geq 5) \\ &= -a \cdot \frac{16}{36} + a \cdot \frac{20}{36} = \frac{a}{9} > 0. \end{aligned}$$

Hurra! Sie wählen Glücksspiel 2!

Sie spielen eine Zeit lang das Glücksspiel 2 und stellen resignierend fest, dass Sie verlieren. Etwa nur jedes dritte Spiel führt zu einem Gewinn. Und nach dem *empirischen* Gesetz über die Stabilisierung relativer Häufigkeiten müsste die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Augenmaximum ≥ 5" bei $1/3$ liegen. Aber wie kann das sein? Ist der Würfel des Zauberers etwa gefälscht? Kann man einen Würfel so fälschen, dass das Augenmaximum gleichverteilt ist? Gilt tatsächlich, dass $M = k$ mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/6$ eintritt, $k = 1, \ldots, 6$, und somit $M \geq 5$ die Wahrscheinlichkeit $1/3$ besitzt? Dies könnte erklären, was durch die Spielwiederholungen beobachtet worden ist.

Sie bitten den Zauber Q um eine Pause. Diese wollen Sie nutzen, um die Frage

> *„Kann das Augenmaximum gleichverteilt sein?"*

zu beantworten.

3 Der Würfel des Zauberes Q

Kann es ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ geben, so dass für das Augenmaximum M gilt

$$Q^2(M = k) = \frac{1}{6}, \quad k = 1, \ldots, 6\,?$$

Das zweifache Produktmaß von Q ist definiert durch

$$Q^2(\{(i,j)\}) = Q(\{i\}) \cdot Q(\{j\}) =: q_i \cdot q_j,\ (i,j) \in \Omega^2.$$

(Sie gehen wie beim fairen Würfel davon aus, dass auch der Zauberwürfel kein „Gedächnis" besitzt). Dabei bezeichnet $q_i := Q(\{i\})$ die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl i, $i = 1, \ldots, 6$. Für diese Zahlen gilt $q_i > 0$ und $q_1 + \ldots + q_6 = 1$. Die Lösungen q_1 bis q_6 lassen sich sukzessive bestimmen. Aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit gilt:

$$Q^2(M = 1) = Q^2(\{(1,1)\}) = q_1 \cdot q_1 \stackrel{!}{=} \frac{1}{6}.$$

Die positive Lösung ist

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.40825.$$

Die Wahrscheinlichkeit q_2 bestimmt sich durch das Lösen der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned} Q^2(M = 2) &= Q^2(\{(2,2),(2,1),(1,2)\}) \\ &= q_2^2 + 2q_1q_2 = q_2^2 + 2\frac{1}{\sqrt{6}}q_2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

die positive Lösung ist

$$q_2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{6}} \approx 0.16910.$$

Die Wahrscheinlichkeit q_3 ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned} &Q^2(M = 3) \\ &\quad = Q^2(\{(3,3),(3,1),(3,2),(1,3),(2,3)\}) \\ &\quad = q_3^2 + 2(q_1 + q_2)q_3 \\ &\quad = q_3^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}q_3 \stackrel{!}{=} \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

diese ist

$$q_3 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{6}} \approx 0.12976.$$

Die sechs quadratischen Gleichungen lauten

$$Q^2(M = k) = q_k^2 + 2q_k \sum_{j=1}^{k-1} q_j \stackrel{!}{=} \frac{1}{6},$$

$k = 1, \ldots, 6$ $\left(\sum_{j=1}^{0} q_j := 0\right)$. Im Fall $k = 6$ lässt sich die letzte Gleichung wegen $q_1 + \ldots + q_5 = 1 - q_6$ schreiben in der Form

$$Q^2(M = 6) = q_6^2 - 2q_6 + \frac{1}{6} = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei positive Lösungen, eine davon allerdings größer als eins. Die Lösungen der drei verbleibenden Gleichungen sind

$$\begin{aligned} q_4 &= \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{\sqrt{6}} \approx 0.10939 \\ q_5 &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{\sqrt{6}} \approx 0.09637 \\ q_6 &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{\sqrt{6}} \approx 0.08713. \end{aligned}$$

Man erkennt sofort

$$\sum_{k=1}^{6} q_k = \sum_{k=1}^{6} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}{\sqrt{6}} = 1$$

und es gilt $q_1 > q_2 > \ldots > q_6$. Diese Ungleichungskette ist relativ einfach zu beweisen: Äquivalente Umformungen zeigen $q_{k+1} - q_k > 0 \Leftrightarrow k^2 - 1 < k^2$.

Also: Der Zauberer hat offensichtlich den Würfel gefälscht! Sie konfrontieren ihn mit Ihrer Vermutung. Der Zauber ist aber ein ehrlicher Zauberer. Er gibt Ihnen Recht und das verlorene Geld zurück. Was hat der Zauberer Q mit diesem Spiel bezwecken wollen? Er weiß, dass Sie sich für Stochastik interessieren und motivierte Sie durch das Glücksspiel die Frage zu beantworten, ob ein Würfel so gefälscht werden kann, dass das Augenmaximum gleichverteilt ist.

Bemerkung 1: Die obigen Überlegungen zeigen, dass es allgemein bei einem n-seitigen Würfel möglich ist – also insbesondere für die fünf Platonischen Körper Tetraeder ($n = 4$), Hexaeder (der Würfel, $n = 6$), Oktaeder ($n = 8$), Dodekaeder ($n = 12$) und Isokaeder ($n = 20$) – ihn so zu fälschen, dass das Augenmaximum beim zweifachen Wurf gleichverteilt ist. Man erkennt das Bildungsgesetz

$$q_k = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}{\sqrt{n}}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

In der Tat löst q_{k+1} die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} Q^2(M = k+1) &= q_{k+1}^2 + 2q_{k+1} \sum_{j=1}^{k} q_j \\ &= q_{k+1}^2 + 2\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} q_{k+1} \stackrel{!}{=} \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

da

$$\left(\frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{n}} \right)^2 + 2\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}.$$

Wie die Lösung zeigt, gibt es genau eine Möglichkeit einen Würfel so zu fälschen, dass das Augenmaximum gleichverteilt ist.

Bemerkung 2: Irrationale (Einzel-)Wahrscheinlichkeiten sind in der Stochastik nichts Ungewöhnliches. Typischerweise treten sie bei geometrischen Wahrscheinlichkeiten auf, siehe z. B. Kütting und Sauer (2011), Beispiel 2.10 und Beispiel 2.12 (Nadelproblem von *Buffon*). Im vorliegenden Fall könnte man an ein Glücksrad denken, dessen n Kreissektoren die Wahrscheinlichkeiten $q_1, \ldots, q_n$ zumindest theoretisch realisieren.

Was wäre gewesen, wenn Sie sich trotzdem für das Glücksspiel 1 entschieden hätten (Sie wollten eben ein faires Spiel)? In diesem Fall erhält man

$$\begin{aligned} &Q^2(\text{ Augensumme gerade}) \\ &= \sum_{(i,j):i+j \text{ gerade}} q_i \cdot q_j \\ &= \Bigg(\underbrace{\sum_{i \in \{1,3,5\}} q_i}_{=:c} \Bigg)^2 + \Bigg(\underbrace{\sum_{j \in \{2,4,6\}} q_j}_{=:d} \Bigg)^2 \\ &= c^2 + d^2 \\ &\approx 0.4024 + 0.1337 = 0.5361 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &Q^2(\text{ Augensumme ungerade}) \\ &= 2 \cdot \Bigg(\sum_{i \in \{1,3,5\}} q_i \Bigg) \cdot \Bigg(\sum_{j \in \{2,4,6\}} q_j \Bigg) \\ &= 2cd \\ &\approx 0.4639. \end{aligned}$$

(für $c, d \in \mathbb{R}$ gilt $c^2 + d^2 \geq 2cd$, Gleichheit genau dann, wenn $c = d$ der Fall ist). Fazit: Mit dem gefälschten Würfel ist das Glücksspiel 1 für Sie vorteilhafter.

Jetzt fordern Sie den Zauberer Q heraus: Fälsche einen Würfel so, dass die Augensumme gleichverteilt ist! Jetzt resigniert der Zauberer, er scheitert. Seine Zauberkräfte reichen nicht aus. Was - so der Zauberer - sagt die Mathematik zur Frage:

„Kann die Augensumme gleichverteilt sein?"

Zunächst sind $2, \ldots, 12$ die möglichen Werte der Augensumme S. Bei einem fairen Würfel gilt

$$P^2(S = k) = \frac{6 - |k - 7|}{36}, \quad k = 2, \ldots, 12,$$

d. h. beim fairen Würfel besitzt die Augensumme keine Laplace-Verteilung. Gibt es ein W-Maß $\tilde{P}$ auf $\{1, \ldots, 6\}$ mit

$$\tilde{P}^2(S = k) = \frac{1}{11}, \quad k = 2, \ldots, 12\,?$$

Man kann zunächst wie beim Augenmaximum die Werte $\tilde{p}_i := \tilde{P}(\{i\})$, $i = 1, \ldots, 6$, sukzessive bestimmen. Die Gleichung

$$\tilde{P}^2(S = 2) = \tilde{P}\big(\{(1,1)\}\big) = \tilde{p}_1^2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{11}$$

besitzt die positive Lösung $\tilde{p}_1 = 1/\sqrt{11}$. Die Wahrscheinlichkeit $\tilde{p}_2$ bestimmt sich durch das Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned} \tilde{P}^2(S = 3) &= \tilde{P}^2\big(\{(1,2),(2,1)\}\big) \\ &= 2\tilde{p}_1\tilde{p}_2 = \frac{2}{\sqrt{11}}\tilde{p}_2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{11}, \end{aligned}$$

die Lösung ist

$$\tilde{p}_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit $\tilde{p}_3$ bestimmt sich durch das Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned}\tilde{P}^2(S=4) &= \tilde{P}^2\big(\{(1,3),(3,1),(2,2)\}\big)\\ &= 2\tilde{p}_1\tilde{p}_3+\tilde{p}_2^2\\ &= 2\frac{1}{\sqrt{11}}\tilde{p}_3+\frac{1}{4}\frac{1}{11}\stackrel{!}{=}\frac{1}{11},\end{aligned}$$

die Lösung ist

$$\tilde{p}_3=\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Entsprechend erhält man die Lösungen

$$\begin{aligned}\tilde{p}_4 &= \frac{5}{16}\frac{1}{\sqrt{11}}\\ \tilde{p}_5 &= \frac{35}{128}\frac{1}{\sqrt{11}}\\ \tilde{p}_6 &= \frac{63}{256}\frac{1}{\sqrt{11}}.\end{aligned}$$

Aber es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6}\tilde{p}_k &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{5}{16}+\frac{35}{128}+\frac{63}{256}\right)\frac{1}{\sqrt{11}}\\ &= \frac{693}{256}\frac{1}{\sqrt{11}}=0.8162...<1\end{aligned}$$

$[(693/256)^2<3^2<11]$. Ein anderes Argument: $\tilde{p}_6=\frac{63}{256}\frac{1}{\sqrt{11}}$ kann nicht stimmen, da $\tilde{p}_6=\tilde{p}_1=1/\sqrt{11}$ sein muss (beachte: $(1,1)$ und $(6,6)$ sind die einzigen Paare, die zur Augensumme 2 bzw. 12 führen).

Es hätte auch genügt, zunächst nur die Werte $\tilde{p}_1$ und $\tilde{p}_2$ zu bestimmen. Es gilt (aus Symmetriegründen) $\tilde{p}_1=\tilde{p}_6=1/\sqrt{11}$ und $\tilde{p}_2=\tilde{p}_5=1/(2\sqrt{11})$ (beachte, dass $(1,2),(2,1)$ und $(5,6),(6,5)$ die zwei Paare sind, die zur Augensumme 3 bzw. 11 führen). Dies impliziert $\tilde{p}_3=\tilde{p}_4$, da $\tilde{p}_3$ und $\tilde{p}_4$ Lösungen derselben Gleichung sind:

$$\begin{aligned}\tilde{P}^2(S=4) &= 2\tilde{p}_1\tilde{p}_3+\tilde{p}_2^2\\ &= 2\frac{1}{\sqrt{11}}\tilde{p}_3+\frac{1}{4}\frac{1}{11}\stackrel{!}{=}\frac{1}{11}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{P}^2(S=10) &= 2\tilde{p}_6\tilde{p}_4+\tilde{p}_5^2\\ &= 2\frac{1}{\sqrt{11}}\tilde{p}_4+\frac{1}{4}\frac{1}{11}\stackrel{!}{=}\frac{1}{11}.\end{aligned}$$

Wegen $\tilde{p}_1+\ldots+\tilde{p}_6=1$ muss $\tilde{p}_3$ Lösung der Gleichung

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{11}}+\frac{1}{2\sqrt{11}}+\tilde{p}_3\right)=1$$

sein:

$$\tilde{p}_3=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Aber dieser Wert löst nicht die Gleichung $\tilde{P}^2(S=4)=1/11$, deren Lösung $\tilde{p}_3=3/(8\sqrt{11})$ ist. Fazit: Es ist unmöglich einen Würfel so zu fälschen, dass die Augensumme gleichverteilt ist.

4 Neue Würfel, neues Spiel – neues Glück?

Der Zauberer Q gibt Ihnen den gefälschten Würfel. Er legt zwei weitere Würfel auf den Tisch und bietet Ihnen eine Modifikation des Zufallsexperiments an: *Zwei visuell nicht unterscheidbare Würfel werden gleichzeitig geworfen.*

Wie ist die neue Spielsituation zu bewerten? Falls beide Würfel fair sind, so wissen Sie (jedenfalls sollten Sie es wissen!), dass sich die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Augensumme und des Augenmaximums nicht ändern. (Bekanntlich berechnet man die Wahrscheinlichkeiten, in dem man gedanklich die Würfel unterscheidbar macht, etwa durch Einfärbung – der eine Würfel ist pflaumenblau, der andere quittengelb. Durch diese gedankliche Unterscheidung ist man in der Situation des zweifachen Würfelwurfes (Laplace-Experiment), wenn man das Ergebnis des pflaumenblauen bzw. quittengelben Wüfels als Ergebnis des ersten bzw. zweiten Wurfes interpretiert.) Damit bleiben auch die erwarteten Gewinne unverändert. Somit wäre Glücksspiel 2 für Sie vorteilhafter. Sie wissen (inzwischen) auch: Falls die beiden neuen Würfel Kopien des gefälschten Würfels sind, so wäre Glücksspiel 1 vorteilhafter. Wie sollen Sie sich entscheiden? Der Zauberer merkt, dass Sie zögern. „Keine Sorge, der gefälschte Würfel, den ich Ihnen gerade gegeben habe, ist ein Unikat", so der Zauberer Q.

Daraufhin wählen Sie das Glücksspiel 2 und müssen erneut feststellen, dass Sie im Mittel zwei von drei Spielen verlieren. Wenn der gefälschte Würfel tatsächlich ein Unikat ist, wie der Zauberer behauptet, so stellt sich die Frage

„Ist es möglich, zwei visuell ununterscheidbare Würfel auf verschiedene Weisen so zu fälschen, dass das Augenmaximum gleichverteilt ist?"

Um diese Frage zu beantworten machen Sie die (gefälschten) Würfel gedanklich unterscheidbar – der eine Würfel ist pflaumenblau, der andere quittengelb. Da Sie ferner davon ausgehen, dass sich die beiden Augenzahlen nicht beeinflussen, lautet die mathematische Präzisierung der obigen Frage:

Kann es zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q auf Ω geben, $P \neq Q$, mit

$$P \times Q(M=k) = \frac{1}{6}, \quad k = 1, \ldots, 6?$$

$P \times Q$ bezeichnet das Produktmaß von P und Q auf Ω^2. Sei p_i bzw. q_i die Wahrscheinlichkeit, beim *p*flaumenblauen bzw. *q*uittengelben Würfel die Augenzahl i zu beobachten, $i = 1, \ldots, 6$. Dabei sollen die Nebenbedingungen $0 < p_i < 1$, $i = 1, \ldots, 6$, $0 < q_j < 1$, $j = 1, \ldots, 6$, $p_1 + \ldots + p_6 = 1$, $q_1 + \ldots + q_6 = 1$ gelten. Wegen

$$P \times Q((i,j)) := p_i q_j, \quad (i,j) \in \Omega^2$$

führt dies zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
P \times Q(M=1) &= p_1 q_1 \stackrel{!}{=} \frac{1}{6} \\
P \times Q(M=2) &= q_2(p_2+p_1) + p_2 q_1 \stackrel{!}{=} \frac{1}{6} \\
P \times Q(M=3) &= q_3 \sum_{i=1}^{3} p_i + p_3 \sum_{j=1}^{2} q_j \stackrel{!}{=} \frac{1}{6} \\
P \times Q(M=4) &= q_4 \sum_{i=1}^{4} p_i + p_4 \sum_{j=1}^{3} q_j \stackrel{!}{=} \frac{1}{6} \\
P \times Q(M=5) &= q_5 \sum_{i=1}^{5} p_i + p_5 \sum_{j=1}^{4} q_j \stackrel{!}{=} \frac{1}{6} \\
P \times Q(M=6) &= q_6 \underbrace{\sum_{i=1}^{6} p_i}_{=1} + p_6 \underbrace{\sum_{j=1}^{5} q_j}_{1-q_6} \stackrel{!}{=} \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Im Fall $P = Q$, d.h. $p_j = q_j$, $j = 1, \ldots, 6$, ist man in der Situation von Abschnitt 3 und die obigen Gleichungen stimmen mit den quadratischen Gleichungen aus Abschnitt 3 überein. Von Interesse ist hier der Fall $p_j \neq q_j$. Es sind 6 Gleichungen mit 12 Unbekannten. Dies lässt die Vermutung zu, dass es unendlich viele Lösungen gibt. Aber man hat die obigen Nebenbedingungen zu beachten. Eine Lösung erhält man wie folgt: Man gibt sich die Werte $p_1, \ldots, p_6$ sukzessive vor und berechnet iterativ die Werte q_k gemäß

$$q_k = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} p_i} \left(\frac{1}{6} - p_k \sum_{j=1}^{k-1} q_j \right), \quad k = 1, \ldots, 6$$

$\left(\sum_{j=1}^{0} q_j := 0\right)$:

Schritt	Berechnung von	eingehende Werte
1	q_1	p_1
2	q_2	p_2, p_1, q_1
3	q_3	p_3, p_2, p_1, q_2, q_1
4	q_4	$p_4, \ldots, p_1, q_3, q_2, q_1$
5	q_5	$p_5, \ldots, p_1, q_4, \ldots, q_1$
6	q_6	$p_6, \ldots, p_1, q_5, \ldots, q_1$

Das Gleichungssystem hat unendlich (genauer: überabzählbar) viele Lösungen. Man wählt als Startwert p_1 mit $p_1 > 1/6$ (sonst wäre $q_1 \geq 1$) und

$$p_1 > p_2 > \ldots > p_6$$

Dies ist eine hinreichende (keine notwendige) Bedingung dafür, dass $q_j > 0$, $j = 1, \ldots, k$, gilt. Wir zeigen dies induktiv. Für $k = 2$ erhält man

$$q_2 = \frac{1}{p_1 + p_2} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right) > 0.$$

$k \to k+1$: Es gelte die Induktionsvoraussetzung (IV)

$$q_k = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} p_i} \left(\frac{1}{6} - p_k \sum_{j=1}^{k-1} q_j \right) > 0.$$

Die Aussage

$$q_{k+1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k+1} p_i} \left(\frac{1}{6} - p_{k+1} \sum_{j=1}^{k} q_j \right) > 0$$

folgt aus

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6} - p_{k+1} \sum_{j=1}^{k} q_j \\
&= \frac{1}{6} - p_k \sum_{j=1}^{k-1} q_j + (p_k - p_{k+1}) \sum_{j=1}^{k-1} q_j - p_{k+1} q_k \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k} p_i - p_{k+1} \right) q_k + (p_k - p_{k+1}) \sum_{j=1}^{k-1} q_j \stackrel{\text{IV}}{>} 0,
\end{aligned}$$

da $q_k > 0$ nach IV.

Folglich ist es möglich, zwei Würfel unterschiedlich zu fälschen, so dass das Augenmaximum gleichverteilt ist. Der Zauberer gibt Ihnen das verlorene Geld zurück, Sie geben ihm seinen (gefälschten) Würfel wieder.

Bemerkung 3: Die obigen Überlegungen zeigen, dass die Aussagen allgemein für den n-seitigen Würfel gelten.

Numerische Auswertungen: Das erste Beispiel zeigt, dass streng monoton fallende p_i-Werte kein monotones Verhalten der q_i-Werte impliziert.

i	p_i	q_i
1	0.25	0.66667
2	0.22	0.04255
3	0.20	0.03705
4	0.15	0.06674
5	0.10	0.09279
6	0.08	0.09420

Das zweite Beispiel zeigt, dass es auch Lösungen für monoton fallende p_i-Wert gibt.

i	p_i	q_i
1	0.80	0.20833
2	0.10	0.16204
3	0.04	0.16154
4	0.02	0.16253
5	0.02	0.15590
6	0.02	0.14966

Das nächste Beispiel zeigt, dass negative q_i-Werte auftreten können, falls die (strenge) Monotonie der p_i-Werte verletzt ist:

i	p_i	q_i
1	0.20	0.83333
2	0.18	0.04386
3	0.28	-0.11962
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Das letzte Beispiel zeigt, dass es eine Lösung geben kann, auch wenn die p_i-Werte nicht monoton fallen (in vielen Fällen führt dies zu negativen q_i-Werten):

i	p_i	q_i
1	0.26	0.64103
2	0.17	0.13417
3	0.15	0.08688
4	0.14	0.06386
5	0.16	0.06614
6	0.12	0.00794

Was wäre gewesen, wenn Sie sich für das (modifizierte) Glücksspiel 1 entschieden hätten? Es gilt

$$\begin{aligned}
&P \times Q(\text{ Augensumme gerade})\\
&= \sum_{(i,j):i+j \text{ gerade}} p_i \cdot q_j\\
&= \sum_{i,j\in\{1,3,5\}} p_i q_j + \sum_{i,j\in\{2,4,6\}} p_i q_j\\
&= (p_1+p_3+p_5)(q_1+q_3+q_5)\\
&\quad +(p_2+p_4+p_6)(q_2+q_4+q_6)
\end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned}
&P \times Q(\text{ Augensumme ungerade})\\
&= \sum_{(i,j):i+j \text{ ungerade}} p_i \cdot q_j\\
&= \sum_{\substack{i\in\{1,3,5\}\\ j\in\{2,4,6\}}} p_i q_j + \sum_{\substack{i\in\{2,4,6\}\\ j\in\{1,3,5\}}} p_i q_j\\
&= (p_1+p_3+p_5)(q_2+q_4+q_6)\\
&\quad +(p_2+p_4+p_6)(q_1+q_3+q_5).
\end{aligned}$$

Die Differenz ergibt

$$\begin{aligned}
&P \times Q(\text{ Augensumme gerade})\\
&\quad -P \times Q(\text{ Augensumme ungerade})\\
&\quad = (p_1+p_3+p_5)\big((q_1+q_3+q_5)-(q_2+q_2+q_6)\big)\\
&\qquad +(p_2+p_4+p_6)\big((q_2+q_4+q_6)-(q_1+q_3+q_5)\big)\\
&\quad = \big((p_1+p_3+p_5)-(p_2+p_4+p_6)\big)\\
&\qquad \cdot\big((q_1+q_3+q_5)-(q_2+q_4+q_6)\big).
\end{aligned}$$

Der erste Faktor ist unter der hinreichenden Bedingung größer als 0, der zweite Faktor ist größer als 0, falls $q_1+q_3+q_5 > q_2+q_4+q_6$. Damit ist Ihr erwarteter Gewinn positiv, wenn z. B. $q_1 \geq 0.5$ ist (dies wäre für $1/6 < p_1 \leq 1/3$ der Fall). Vermutung: Es gilt stets

$$q_1+q_3+q_5 > q_2+q_4+q_6!$$

Die Frage, ob es möglich ist, zwei Würfel unterschiedlich zu fälschen, so dass die Augensumme gleichverteilt ist, führt auf das Lösen von 11 Gleichungen mit 12 Unbekannten. Der direkte Nachweis, dass dieses Gleichungssystem keine Lösung besitzt, ist mühselig (anders als der in Abschnitt 3 behandelte spezielle Fall $P = Q$). Unter Verwendung eines analytischen Hilfsmittels, den *erzeugenden Funktionen*, lässt sich die Unmöglichkeit einer gleichverteilten Augensumme sehr elegant zeigen. Wäre dies möglich, so würde dies zu der (falschen) Aussage führen, dass ein Polynom fünften Grades keine reelle Nullstelle besitzt. Für die Details sei auf Götz (2006) und Henze (2018), Abschnitt 25.7, verwiesen.

5 Der Zauberer Q im Schulunterricht

Die Analyse zweier Glücksspiele verknüpft stochastische Inhalte wie Laplace-Modell, Produktmaß und stochastische Unabhängigkeit mit algebraischen Methoden wie das (iterative) Lösen von quadratischen Gleichungen und linearen Gleichungssystemen, teils mit numerischen Auswertungen.

Üblicherweise wird die Fairness eines Glücksspiels mittels des Erwartungswertes bewertet. Der Begriff des Erwartungswertes muss in der vorliegenden Situation nicht zwingend vorausgesetzt werden, da die beiden Glücksspiele von einfacher Struktur sind. Zur Bewertung hat man nur ein Ereignis A und das Gegenereignis A^c zu betrachten: Wenn A eintritt, gewinnt man a Euro, ansonsten verliert man a Euro (beim Glücksspiel 1 ist A „Augensumme gerade", beim Glücksspiel 2 ist A „Augenmaximum ≥ 5"). Ist die Eintrittswahrscheinlichkeit von A größer als die von A^c, so ist einsichtig, dass das Spiel für uns vorteilhaft ist. Dies genügt. Ergänzend kann die Formel

$$\begin{aligned} \text{erwarteter Gewinn} &= a \cdot P(A) - a \cdot P(A^c) \\ &= a \cdot \big(2P(A) - 1\big) \end{aligned}$$

ins Spiel gebracht werden.

Die Herleitung der 6 Gleichungen mit 12 unbekannten Einzelwahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_6, q_1, \ldots, q_6$ aus Abschnitt 4 dürfte für Schüler*innen kein größeres Problem darstellen. Hier sollte die Lehrkraft durch ein entsprechendes Programm ein „Arbeitsblatt" (Excel-Sheet oder ähnliches) zur Verfügung stellen. Die Schüler*innen können so sukzessive verschiedene p_i-Werte eingeben und durch Ausprobieren feststellen, ob es zu sinnvollen q_i-Werten kommt. (Natürlich kann man ihnen die Programmierung des Gleichungssystems als Aufgabe überlassen.) Auf diese Weise werden sie die Lösbarkeit des Gleichungssystems erkennen und feststellen, dass es viele verschiedene Lösungen gibt. Vielleicht erkennen die Schüler*innen, dass es bei streng monoton fallenden p_i-Werten – $p_1 > 1/6$ vorausgesetzt – immer eine Lösung gibt. Bezüglich der Gleichverteilung der Augensumme bleibt dagegen nur die Feststellung: Die Antwort ist negativ und der Beweis verwendet Methoden der höheren Mathematik.

Danksagung: Die Autoren danken den Gutachtern für ihre kritische Durchsicht und Verbesserungsvorschlägen.

Literatur

Götz, S. (2006): Würfel und Augensummen - ein umögliches Paar, *Teaching Mathematics and Computer Science* 4, 71-88.

Kütting H. und Sauer, M. J: (2011): Elementare Stochastik, 3. Auflage. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

Henze, N. (2018): Stochastik für Einsteiger. 12. Auflage. Springer Spektrum, Wiesbaden.

Anschrift
Frank Marohn
Institut für Mathematik
Universität Würzburg
Emil-Fischer-Str. 30
97074 Würzburg
marohn@mathematik.uni-wuerzburg.de
felix-benjamin.brosowsky@stud-mail.uni-wuerzburg.de